# On Some martingales(諸種のマルチンゲールについて)

| | |
|---|---|
| 氏名・(本籍) | 風巻紀彦（かざまきのりひこ） |
| 学位の種類 | 理学博士 |
| 学位記番号 | 理第402号 |
| 学位授与年月日 | 昭和48年6月27日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第2項該当 |
| 最終学歴 | 東北大学大学院理学研究科<br>修士課程数学専攻修了 |
| 学位論文題目 | On Some martingales<br>(諸種のマルチンゲールについて) |
| 論文審査委員 | (主査)<br>教授 土倉 保　　教授 洲之内源一郎<br>　　　　　　　　教授 深宮政範 |

## 論文目次

# 論　文　内　容　要　旨

## 序

J. L. Doob（1940：1953）は，調和函数に相当する概念としての，マルチンゲールの重要性を洞察し，その理論の基礎を与えた。時間変更は種々の確率過程を，性質の良くわかっているBrown運動やPoisson 過程等に変換する手段であって，マルチンゲールを研究する上に於ても，やはり重要な役割を果す。例えば，L. E. Dubins-G. Schwarz（1965）によって，多くの連続なマルチンゲールが，1次元のBrown 運動より，適当な時間変更を用いて求まることが証明されている。ところが，本論文で示されるようにマルチンゲール及び，1965年に伊藤清一渡辺信三によって導入された局所マルチンゲールは，いずれも時間変更に対して不変性を持つ概念ではない。これは，誠に不便と言わざるを得ない。著者がマルチンゲールのより自然な拡張として，“weak martingales”弱マルチンゲールを導入する意図は，この点にある。弱マルチンゲールは，局所マルチンゲールとは著しく異なる，いくつかの興味深い性質を持っており，その研究が本論文の主題をなす（2章，3章）。第3章に於て，著者は，ある条件の下で弱マルチンゲールに関する確率積分方程式の一意解の存在を証明した。第4章では，等角マルチンゲールに関するR. K. Getoor-M. J. Sharpe（1972）の基本定理の拡張定理を与える。これは，Getoor-Sharpeの理論の，右連続マルチンゲールへの拡張が可能かという問題を，部分的に解決したものである。

## 第1章　局所マルチンゲールと時間変更

確率空間（$\Omega$，$F$，$P$）上に，次の条件をみたす$F$ の部分の一集合体の族 $(F_t)_{t\geqq o}$ があたえられているとする。$F_s \subset F_t$，$s > t$，$F_t = \bigcap_{h>o} F_{t+h}$ $(\forall t \geqq o)$，確率変数 $\tau \geqq o$ が，$\forall t \geqq o$，$\{\omega \varepsilon \Omega \mid \tau(\omega) \leqq t\} \varepsilon F_t$ をみたすとき，$T_t$ 一停止時刻という。確率過程$M=(M_t, F_t)$が局所マルチンゲールとは，適当な $F_t$ 一停止時刻の系列 $(T_n)$，$\lim_n Tn = +\infty$ a. s.が存在して，各 n に対し，$(M_{t \wedge Tn} I_{\{T_n > o\}})$ がマルチンゲールとなるときに言う。著者は，まず，局所マルチンゲールに対する，Krickeberg 分解定理を与える。

定理1.　局所マルチンゲールMが，2つの非負局所マルチンゲールの差に分解されるための，必要十分条件は，$\sup_n E\left|M_{Tn}\right| < +\infty$をみたすように $(T_n)$ を選べることである。

各$\tau_t$，$t \geqq o$，が$F_t$ 一停止時刻で，確率1で，$\tau_o(\omega)$ が右連続かつ単調増加のとき，$T=(\tau_t)$のことを時間変更という。特に，$\tau_o(\omega)$ が連続のとき，Tは連続であるという。次の定理は，著名なDoobの結果とは異なる型の判定条件を与えている。

定理2.　局所マルチンゲールMと時間変更Tが条件：$P\{\omega \varepsilon \Omega \mid M_o(\omega)$ が区間$[o, \tau_o(\omega)]$，$[\tau_{t-o}(\omega), \tau_t(\omega)]$ 上で一定$\} = 1$

をみたすとき，$TM = (M\tau_t)$ は，局所マルチンゲールとなる。

連続な時間変更は，この条件をみたしている。P. A. Meyer（1962，1963）は，任意の自乗可積分マルチンゲールMに対し，自然増加過程$\langle M, M\rangle$が一意に存在し，$M^2 - \langle M, M\rangle$

がマルチンゲールとなることを証明したが，特に$\langle M, M\rangle$が連続であれば，$\tau_t=\inf\{s; \langle M, M\rangle_s>t\}$によって定義される時間変更$T=(\tau_t)$は，定理２の条件をみたす。

確率積分論は，伊藤清（１９４４）に始まる。しかしそれは，Brown 運動に関する確率積分を論じたものであったが，その後，P. A. Meyer（１９６２），P. Courrège（１９６３），国田寛一渡辺信三（１９６７）によって，自乗可積分マルチンゲールに，次いで，互いに独立に，P. A. Meyer（１９６７），P. W. Millar（１９６７）が，確率積分を局所マルチンゲールにまで拡張した。著者は次章に於て，弱マルチンゲールに関する確率積分の定義を与える。

確率積分$(H\cdot M)_t=\int_0^t H_a dM_a$が通常の積分と区別されるのは，$M_0(\omega)$が必ずしも微分可能でも，又，有界変分でもない事に原因がある。いま，M，Nを局所自乗可積分マルチンゲールとする。$\langle M, N\rangle=\frac{1}{2}(\langle M+N, M+N\rangle-\langle M, M\rangle-\langle N, N\rangle)$とおくとき，国田一渡辺によって，$MN-\langle M, N\rangle$が，局所マルチンゲールとなることが示された（１９６７）。著者は，時間変更による確率積分の性質を，次の形で与える。

定理３. 時間変更Tが連続のとき，

１）$\langle TM, TN\rangle=T\langle M, N\rangle$

２）$(TH)\circ(TM)=T(H\cdot M)$

なお，P. A. Meyer（１９６７）は，任意の局所マルチンゲールM，Nに対して，２つの増加過程の差である確率過程$[M, N]$が存在して，$MN-[M, N]$が，又，局所マルチンゲールとなることを証明している。

## 第２章　弱マルチンゲール

確率過程Mが弱マルチンゲールとは，$F_t$一停止時刻$T_n$とマルチンゲール$M^n$が存在して，$\lim_n T_n=+\infty$かつ，各確率区間$[o, T_n[$上で，$M=M^n$が成立することである。局所マルチンゲールは，弱マルチンゲールであるが，弱マルチンゲールが任意の時間変更に対し，不変な概念であることからも明らかなように，この逆は，必ずしも成立しない。

定理４. (1)弱マルチンゲールMが局所マルチンゲールである為の必要十分条件は，各nに対し，$(M_{T_n}^{n+j} I_{\{T_n>o\}})_{j=1, 2, \ldots\ldots}$が一様可積分となるように，$T_n$，$M^n$がとれることである。

(2)弱マルチンゲールMが局所自乗可積分マルチンゲールである為の必要十分条件は，

$\sup_j E[(M_{T_n}^{n+j})^2 I_{\{T_n>o\}}]<+\infty_{n=1, 2, \ldots\ldots}$，をみたす$T_n$，$M^n$が存在することである。

弱マルチンゲールに関する確率積分の定義は，P. A. Meyerの方法に従い，次の様に与えることが出来る。

定理５. Mを弱マルチンゲールとする。このとき任意の有界な確率過程Hに対し，弱マルチンゲールNが一意に存在し，各確率区間$[o, T_n[$上で，$N=H\cdot M^n$が成立する。

このNを，MによるHの確率積分と定義する。

## 第３章　確率積分方程式論

$f(x)$，$g(x)$をR上の連続函数，$M=(M_t, F_t)$を弱マルチンゲール，$A=(A_t, F_t)$を増加過

程として，次の確率積分方程式を考える。

$$(*)\quad X_t = x + \int_0^t f(X_{s-})\,dM_s + \int_0^t g(X_{s-})\,dA_s$$

右辺第２項は，確率積分，第３項は各$\omega$を固定してのStieltjes積分の意味である。特にMがBrown運動，dAtがLebesgre 測度のときの，（＊）の一意解は拡散過程をなす。従って，拡散過程の構成問題を考えるには，（＊）の一意解の存在証明が一つの手掛りとなる。この方向の研究は，伊藤清（１９４６）以来，多くの確率論研究者によって続けられている。（＊）の様な一般化された確率積分方程式を考えるのも，より広いクラスに属するMarkor過程を求める意味で，興味深い問題と思われる。

定理６．$(F_t)$は擬左側連続，$(A_t)$は擬左側増加過程。f，gがいずれもLipschitz連続のとき，（＊）は一意解を持つ。

注意(1)　C. Doleʹans DADE（１９７０）は，$f(x)\equiv x$
$g(x)\equiv o$，Mが局所マルチンゲールのとき，

$$X_t = e^{M_t - \frac{1}{2}[M,M]_t} \prod_{o\leqq s\leqq t}(1+\triangle M_s)\,e^{-\triangle M_s}$$

が一意解であることを示している。但し，$\triangle M_s \equiv M_s - M_{s-}$

(2)　渡辺信三（１９７１）は，f，gがLipschitz連続Mが連続なマルチンゲール，$A=\langle M, M\rangle$のとき（＊）の解について調べている。

## 第４章　等角マルチンゲール

局所自乗可積分マルチンゲールM，Nが

$$\langle M, M\rangle = \langle N, N\rangle,\ \langle M, N\rangle = o$$

をみたすとき，複素数値マルチンゲールM＋ｉNを等角マルチンゲールという。この概念は，M，Nが連続の場合に，Getoor-Sharpe（１９７２）によって導入された。Getoor-Sharpeの主要な結果は，

(a)　任意の連続なマルチンゲールMに対し，連続なマルチンゲールNが存在し，M＋ｉNが等角マルチンゲールとなる。

(b)　$H^1$ ーマルチンゲールの作る空間$H^1$ の共役空間はBMOーマルチンゲールの作る空間BMOである。

の２点であると言える。Getoor-Sharpeの理論の右連続マルチンゲールへの拡張が可能か？という問題は，$\langle\ ,\ \rangle$と$[\ ,\ ]$のいずれをとるかで，２通りの解釈が出来る。P. A. Meyer（１９７３）は，$[\ ,\ ]$で定義された$H^1$，BMOに対し(b)の拡張問題に肯定的解答を与えた著者は，Getoor-Sharpeの結果を，$\langle\ ,\ \rangle$の意味で考え，$(F_t)$が擬左側連続という仮定の下で，(a)，(b)の拡張問題を肯定的に解決した。

定理７．（Ｑ，Ｆ，Ｐ）が可分，$(F_t)$が擬左側連続のとき，

(a)　任意の局所自乗マルチンゲールMに対し，連続な局所マルチンゲールNが存在し，M＋ｉNが等角マルチンゲールとなる。

(b)　$(H^{1})^{*}=BMO$

$(F_t)$の擬左側連続性を仮定しないときの，(a), (b)の＜　，　＞の意味での拡張問題は，かなり難かしいと思われる。〔　　　〕で定義される等角マルチンゲールの存在問題と共に，雑された興味深い問題である。

## 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

確率過程論におけるマルチンゲールの概念はLe'vy, Doob等によって調和函数に相当する概念として重要であることが示されてきた。その後多くの研究者によってBrown 運動などとの関連性や従来の確率論における理論の統一などに広汎な応用があることが知られた。

主論文の第一章は連続時系の場合にマルチンゲール，または局所マルチンゲールといわれるものが時間変更に対して不変性をもっていないことに注目した研究で，まず局所マルチンゲールに対してこれがKrickebergの分解ができる必要十分条件を求めた。ついで時間変更に対して局所マルチンゲールという性質が失われないための十分条件を与えた。

さらに時間変更に関連して確率積分の性質を研究して連続な時間変更については対応する増加過程はそのまま時間変更でえられること，また時間変更と確率積分の順序は互換できることなどを示した。

第2章では上述のように局所マルチンゲールが時間変更で不変ではないので新しく弱マルチンゲールを定義し，これは時間変更について不変であることを示した。さらに弱マルチンゲールが局所マルチンゲールになるための必要十分条件など，いくつかの興味ある性質を示している。

第3章では，従来主としてBrown 運動について扱われていた，いわゆる拡散過程というものを構成する確率積分方程式に関する研究で，これを弱マルチンゲール過程に拡張して論じ，やはり確率過程の適当な連続性，リプシッツ条件等のもとで解の存在と一意性がえられることを証明している。

第4章では，最近Getoor-Sharpeによって導入された等角マルチンゲールに関連する研究がなされている。すなわちマルチンゲールについて一種の共役なマルチンゲールを決定する問題であって，調和解析におけるハーディ・クラスの研究にも関連するものである。これについてマルチンゲールの連続性の仮定を緩めることを考え，既知の結果を拡張することを論じている。

参考論文2編もマルチンゲールに関連した研究で，一つはマルチンゲールの期待値に関する研究，他の一つは確率積分方程式に関する一つの結果で，それぞれ興味あるものである。

よって風巻紀彦提出の論文は理学博士の学位論文として合格であると認める。